中学生数理化

MATHS PHYSICS & CHEMISTRY FOR MIDDLE SCHOOL STUDENTS(SENIOR HIGH SCHOOL EDITION)

全面配合教材，注重求实、创新、博学
全程备考理念，指点方法、技巧、思路

本期刊蝉联全国优秀科技期刊
河南省一级期刊
中国基础教育知识仓库来源期刊
中国邮政校园核心报刊

高一 数学

®

高中版

绿色印刷

2025年 10月

第40期 · 总第1087期

2025 年 10 月
第 40 期·总第 1087 期
1981 年 10 月创刊

Zhongxuesheng Shulihua

中学生数理化

(高中版) 高一数学

国际标准连续出版物号：
ISSN 1001-6953
国内统一连续出版物号：
CN 41-1099/O
定　　价：8.00 元

主管单位：河南教育报刊社
主办单位：河南教育报刊社
社　长：侯　岩
总编辑：贺今伟

出版：《中学生数理化(高中版)》编辑部
地址：(450044)郑州市惠济区月湖南路
17 号 1 号楼
主　编：赵　平
副主编：徐利杰
责任编辑：郭正华(0371-66370657)
E-mail:516355825@qq.com
王琼霞(0371-66370650)
E-mail:371157227@qq.com
张　巧(0371-66370630)
E-mail:120003292@qq.com
执行美编：张鹏辉
投稿-答疑信箱：zxsslh_gy@163.com
电话：0371-66370701
网址：www.shuren100.com
智慧支持：河南省教育学会创新教育专业
委员会

发行单位：中国邮政集团有限公司河南省
报刊发行局
发行范围：国内外公开发行
国内订阅：全国各地邮局
国内发行代号：36-308
河南专号 1：36-973
河南专号 2：36-991
国际订阅：中国国际图书贸易集团有限公司
国际发行代号：C8633
自办订阅：河南教育读物发行总社
订阅热线：0371-67129573
发行服务：河南教育报刊社发行部
服务热线：400-659-7019
淘宝网购：

扫描二维码，订阅方便实惠

出版日期：10 月 27 日
印　　制：河南文达印刷公司
(450008 郑州市黄河路 124 号)
(如有印装问题，请寄该公司调换，
反馈电话 13838080644)
广告电话：0371-66327883

目次　Contents

知识结构与拓展

3　例析函数解析式的五种解法　徐春生
4　小议函数单调性的应用　贺显孟
6　函数的奇偶性问题“揭秘”　丁荣荣
7　已知函数的单调性，探究参数的取值范围　张振继
8　抓住关键　学好函数的单调性　刘长柏
10　幂函数题型例讲　王春玲　隋国庆
11　例析抽象函数的八种题型　吴祖金
13　四种策略，求复合函数的对称轴　杜海洋
14　幂函数四类压轴问题猜想与揭秘　宫鸡明
16　分段函数问题面面观　胡贵平
17　函数的单调性、奇偶性、对称性及周期性考法聚焦　高　嘉

本刊承诺

一、提高刊物质量：
1.努力提高作者层次，坚决杜绝平庸稿。
2.坚持稿件评审操作流程，严把稿件质量关。
3.强化编校质量管理，精编细校，不出差错。

二、坚持办刊思路：
1.高一注重核心考点剖析，强化核心考点训练。
2.高二注重核心考点剖析，强化核心考点训练。
3.高三突出专题，强化命题分析和演练。

三、强化服务意识：
1.与作者密切联系，及时反馈稿件使用情况。
2.对读者贴心交流，凡有疑难，及时回复。
3.对杂志订阅周到服务，及时邮寄，方便快捷。

幂函数四类压轴问题猜想与揭秘

■宫鸡明

猜想一：幂函数性质的判断问题

例1 写出一个同时具有下列性质①②③的函数 $f(x)=$____。

①$f(x_1x_2)=f(x_1)f(x_2)$；②对任意两个不同的正数 x_1,x_2，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 恒成立；③对任意两个不同的正数 x_1,x_2，都有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$。

解：取幂函数 $f(x)=\sqrt{x}$，再逐一进行验证。对于①，由 $f(x)=\sqrt{x}$，可得 $f(x_1x_2)=\sqrt{x_1x_2}=f(x_1)f(x_2)$，①满足。对于②，对任意两个不同的正数 x_1，x_2，都有 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 恒成立，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增。易知函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调递增函数，②满足。对于③，任取 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1\neq x_2$，因为 $\left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right]^2-\left[\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right]^2=\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2}}{4}=\frac{(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2}{4}>0$，所以 $\left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right]^2>\left[\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right]^2$，两边开平方得 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，③满足。故所求函数 $f(x)=\sqrt{x}$（答案不唯一）。

揭秘：研究幂函数主要考虑定义域、对应法则、奇偶性、单调性等。当幂指数大于零时，常常要研究图像的凸凹性。

猜想二：幂函数作为外层函数的复合函数的定义域、单调区间及最值问题

例2 设函数 $f(x)=\sqrt{-x^2+5x+6}$。

(1)求 $f(x)$ 的定义域。

(2)求 $f(x)$ 的单调区间。

(3)求 $f(x)$ 在区间 $[1,5]$ 上的最大值和最小值。

解：(1)利用函数定义域的定义，结合一元二次不等式求解。由 $-x^2+5x+6\geqslant0$，可得 $x^2-5x-6\leqslant0$，所以 $-1\leqslant x\leqslant6$，所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,6]$。

(2)利用复合函数的单调性求解。由(1)知 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,6]$。令函数 $u(x)=-x^2+5x+6=-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{49}{4}$，其图像的开口向下，对称轴方程为 $x=\frac{5}{2}$，结合复合函数的单调性可知，$f(x)$ 的单调递增区间是 $\left[-1,\frac{5}{2}\right]$，单调递减区间是 $\left[\frac{5}{2},6\right]$。

(3)根据函数的单调性求最值。由(2)知 $f(x)$ 在 $\left[1,\frac{5}{2}\right]$ 上单调递增，在 $\left[\frac{5}{2},5\right]$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 在区间 $[1,5]$ 上的最大值为 $f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{7}{2}$。又 $\frac{5}{2}-1<5-\frac{5}{2}$，所以 $f(x)$ 在区间 $[1,5]$ 上的最小值为 $f(5)=\sqrt{6}$。故函数 $f(x)$ 在区间 $[1,5]$ 上的最大值为 $\frac{7}{2}$，最小值为 $\sqrt{6}$。

揭秘：外层为幂函数的复合函数，要明确内层函数在定义域下的单调性，结合复合函数的“同增异减”法则确定单调区间，进而求出区间上函数的最值。

猜想三：外层为幂函数的复合函数由单调性求参数的取值范围问题

例3 若函数 $y=\sqrt{x^2-ax}$ 在 $[a^2,+\infty)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围为____。

解：由题意可令函数 $t=x^2-ax=$

$x(x-a)\geqslant 0$，则其图像的开口向上且对称轴方程为 $x=\frac{a}{2}$。显然幂函数 $y=\sqrt{t}$ 在定义域上单调递增。

当 $a\leqslant 0$ 时，函数 $y=\sqrt{x^2-ax}$ 的定义域为 $(-\infty,a]\cup[0,+\infty)$，可知函数 $y=\sqrt{t}$ 在 $(-\infty,a]$ 上单调递减，在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，此时函数 $y=\sqrt{x^2-ax}$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，结合题设递增区间得 $\begin{cases}a^2\geqslant 0,\\ a\leqslant 0,\end{cases}$ 解得 $a\leqslant 0$；当 $a>0$ 时，函数 $y=\sqrt{x^2-ax}$ 的定义域为 $(-\infty,0]\cup[a,+\infty)$，可知函数 $y=\sqrt{t}$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，在 $[a,+\infty)$ 上单调递增，此时函数 $y=\sqrt{x^2-ax}$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调递增，结合题设递增区间得 $\begin{cases}a^2\geqslant a,\\ a>0,\end{cases}$ 解得 $a\geqslant 1$，即 $a\in[1,+\infty)$。

综上可得，实数 a 的取值范围为 $(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$。

揭秘：外层函数为幂函数，内层函数为二次函数的复合函数，通过合理分类，寻找内层函数的单调区间，结合题设条件求出参数的取值范围。

猜想四：构建外层为幂函数的复合函数比较大小

例4 已知函数 $f(x)=\sqrt{4-x^2}$，若 $0<x_1<x_2<x_3<2$，则（　　）。

A. $\frac{f(x_1)}{x_1}<\frac{f(x_3)}{x_3}<\frac{f(x_2)}{x_2}$

B. $\frac{f(x_1)}{x_1}<\frac{f(x_2)}{x_2}<\frac{f(x_3)}{x_3}$

C. $\frac{f(x_3)}{x_3}<\frac{f(x_2)}{x_2}<\frac{f(x_1)}{x_1}$

D. $\frac{f(x_2)}{x_2}<\frac{f(x_3)}{x_3}<\frac{f(x_1)}{x_1}$

解：令函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}=\sqrt{\frac{4}{x^2}-1}\,(0<x<2)$。因为函数 $y=\frac{4}{x^2}-1$ 在区间 $(0,2)$ 上单调递减，所以函数 $g(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上单调递减。又因为 $0<x_1<x_2<x_3<2$，所以 $g(x_3)<g(x_2)<g(x_1)$，所以 $\frac{f(x_3)}{x_3}<\frac{f(x_2)}{x_2}<\frac{f(x_1)}{x_1}$。应选C。

揭秘：依据所求结论的结构特征构造函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x}=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$，注意 $g(x)$ 的定义域为 $(0,2)$，且 $g(x)$ 在定义域上单调递减，进而作出大小判断。

感悟与收获

1. 已知函数 $f(x)=\sqrt{|x|}$，则下列选项错误的是（　　）。

A. $f(x)$ 的图像过点 $(0,0)$

B. $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称

C. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

D. $f(x)>0$

提示：因为 $f(0)=0$，所以 $f(x)$ 的图像过点 $(0,0)$，A正确。函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(-x)=\sqrt{|-x|}=\sqrt{|x|}=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数，其图像关于 y 轴对称，B正确。当 $x>0$ 时，$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$，根据幂函数的性质知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，C正确。因为 $|x|\geqslant 0$，所以 $f(x)=\sqrt{|x|}\geqslant 0$，即 $f(x)\geqslant 0$，D错误。应选D。

2. 已知 $a=\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$，$b=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$，$c=\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{5}}$，则 a,b,c 的大小关系是（　　）。

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$

C. $a>c>b$　　D. $c>a>b$

提示：因为 $c=\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{5}}=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^{\frac{3}{5}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{6}{5}}$，函数 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上单调递减，$\frac{3}{4}<1<\frac{6}{5}$，所以 $b>\frac{2}{3}>c$。又因为函数 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $\frac{4}{5}>\frac{3}{4}>\frac{2}{3}$，所以 $a=\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{3}}>\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}>\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}=b$。综上可得，$a>b>c$。应选A。

作者单位：江苏省常州市金坛区第一中学

（责任编辑　王琼霞）

学术活动证明

兹有宫鸡明老师于2025年12月11日在我区举行的“高三数学第一次教学暨高中数学课堂教学范式研讨”活动中，开设题为《以函数思想为统领，强化主线，融合提升—2026高考数列备考建议》的专题讲座。

常州市金坛区教师发展中心

二〇二五年十二月